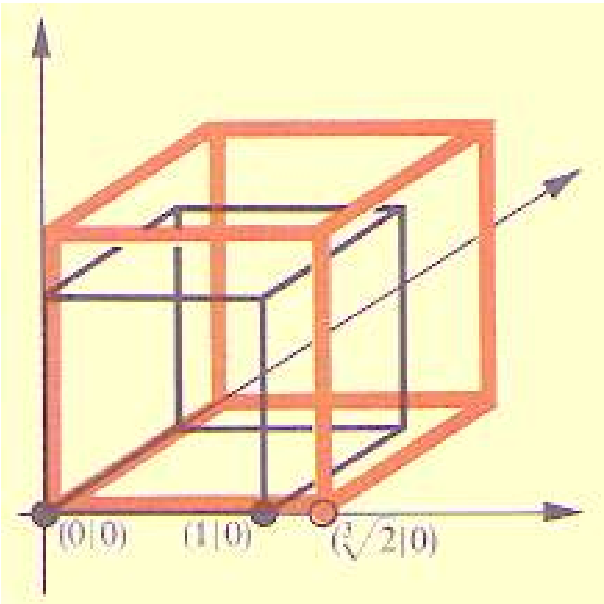
Protokoll der Projektgruppe „Zirkel und Zahlen“,
Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Juli 07

Zirkel und Zahlen

Team: Nancy Seckel, Hans Christian Döring,
Eugenio Buzzoni, Anna Thurmayer, Maximilian Pfister,
Julia-Antonia Merklein, Urs Scheffner

Tutoren: Florian Möller, Rintaro Ono,
Prof. Steuding, Isa Itopac, Florian Stefan



1 Vermittlung der Grundlagen

1.1 Beweis

Ein *Beweis* ist eine Kette von Aussagen, die bei einer wahren Aussage startet und durch logische Verknüpfungen die jeweils folgenden Aussagen impliziert. Eine Aussage ist dann bewiesen, wenn sie am Ende einer solchen Kette steht. In der Regel setzt man ein System von Axiomen $\mathfrak{A}$ voraus, deren Wahrheit nicht angezweifelt wird. Mit Hilfe logischer Verknüpfungen folgen dann daraus weitere Aussagen.

1.1.1 Beweismethoden

Für einen Beweis gibt es unterschiedliche Methoden.

1. Der direkte Beweis ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$)
   Wie bereits erwähnt, geht man hierbei von einer wahren Voraussetzung $\mathcal{A}$ aus und zeigt, dass die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist.
   Beispiel: $a, b \in \mathbb{N}$ ungerade $\Rightarrow a + b$ gerade,$a \cdot b$ ungerade

2. Der Widerspruchsbeweis
   Hierbei wird die Wahrheit einer Implikation gezeigt, indem die Verneinung $\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ für falsch befunden wird. Zeigt man, dass $\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$ mit einer offensichtlich falschen Aussage $\mathcal{C}$ wahr ist, so muss $\neg\mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ selbst falsch sein aufgrund des „ausgeschlossenen Dritten“ muss demnach die ursprüngliche Behauptung wahr sein. Ein typischer Widerspruch ist $\neg\mathcal{A} \wedge \mathcal{A}$.

3. Die Kontraposition
   Diese Methode beruht auf der Tautologie[1] $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$. Im Gegensatz zum Widerspruchsbeweis wird hier keine zusätzliche Prämisse eingeführt. Häufig werden Kontrapositionsbeweise als „Widerspruchsbeweis“ geführt, wobei die Annahme $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ gemacht wird und daraus der Widerspruch $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ herbeigeführt wird. Dabei wird oftmals die Aussage $\mathcal{A}$ nicht verwendet.

1.1.2 Das Induktionsprinzip

Ein häufig verwendetes Verfahren um Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen, ist das Induktionsprinzip.
Gilt für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$

1. $1 \in M$

2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \in M \Rightarrow (n + 1) \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist M induktive Teilmenge von $\mathbb{N}$, aber $\mathbb{N}$ ist bereits kleinste *induktive* Menge.
Es folgt das Verfahren der vollständigen Induktion:
Sei $M = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{A}(n)\}$. Dann ist die gewünschte Aussage äquivalent zu „$M = \mathbb{N}$“. Der Beweis besteht nun aus zwei Teilen:

1. *Induktionsanfang*: Man zeigt $\mathcal{A}(1)$ ist wahr, also $1 \in M$.

[1] Eine Tautologie ist eine Aussageverknüpfung, die allein aufgrund ihrer logischen Struktur immer wahr ist. Beispiel: $\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$

2. *Induktionsschluss*: Man beweist für beliebiges $n \in \mathbb{N}$, dass die Implikation $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ wahr ist. (Beispiel: $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$)

Anstatt die Induktion bei 1 zu beginnen, kann man auch bei einem $k \in M$ starten und die Aussage für alle $n \geq k$ zeigen.

1.2 Definition von Konstruierbarkeit

I) Eine Gerade heißt konstruierbar, wenn sie durch zwei konstruierbare Punkte definiert ist.

II) Ein Kreis heißt konstruierbar, wenn sein Mittelpunkt und sein Radius konstruierbar sind.

III) Ein Punkt heißt konstruierbar, wenn er Schnittpunkt zweier geometrischer Figuren ist, wobei diese konstruierbare Kreise und Geraden sind.

IV) Gegebene Punkte gelten als konstruierbar.

2 Grundkonstruktionen

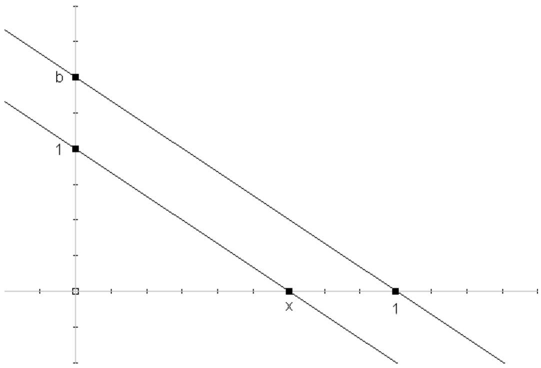
Eine reelle Zahl r heißt konstruierbar, wenn eine Strecke mit der Länge r konstruierbar ist.

I) Alle ganzen Zahlen sind konstruierbar durch das mehrmalige Antragen einer Strecke der Länge 1 auf einer Geraden in die jeweils positive oder negative Richtung.

II) Eine Summe ist genau dann konstruierbar, wenn die Länge der Summanden konstruierbar ist, weil man sie auf einer Geraden nacheinander in die positive Richtung antragen kann.

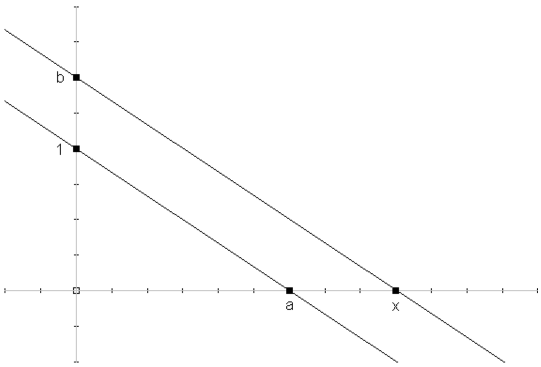
III) Eine Differenz ist genau dann konstruierbar, wenn die Längen des Subtrahenden und des Minuenden konstruierbar sind, weil man den Subtrahenden in die positive Richtung und den Minuenden in die negative Richtung antragen kann.

IV) Ein Quotient ist genau dann konstruierbar, wenn die Längen von Dividend und Divisor konstruierbar sind (Strahlensatz).



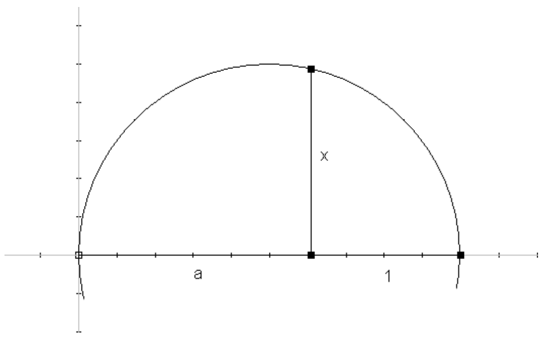
$b > 1, x = 1/b$ (zentrische Streckung)

V) Ein Produkt ist genau dann konstruierbar, wenn die Längen der Faktoren konstruierbar sind (Strahlensatz).



$b > 1, x = a \cdot b$ (zentrische Streckung)

VI) Eine Quadratwurzel ist genau dann konstruierbar, wenn die Länge des Radikanten konstruierbar ist (Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$ in einem rechtwinkligen Dreieck).



$x^2 = a$ (Thaleskreis)

Man erhält: Eine reelle Zahl ist dann konstruierbar, wenn sie sich als Term schreiben lässt, der aus beliebig ineinander verschachtelten Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten und Quadratwurzeln natürlicher Zahlen besteht.

3 Konstruierbare Zahlen

Gegebene Zahlen sind 0 und 1. Die nächste konstruierbare Zahl ist entweder 2 oder -1. Da das Schneiden von Kreisen und Geraden auf höchstens quadratische Gleichungen führt, kann man per Induktionsbeweis zeigen, dass alle konstruierbaren Zahlen sich als Term schreiben lassen, der aus beliebig ineinander verschachtelten Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten und Quadratwurzeln natürlicher Zahlen besteht.

Insgesamt gilt: Eine reelle Zahl ist genau dann konstruierbar, wenn sie sich als Term schreiben lässt, der aus beliebig ineinander verschachtelten Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten und Quadratwurzeln natürlicher Zahlen besteht.

4 Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke

4.1 Kriterien für die Konstruierbarkeit regelmäßiger n-Ecke

I) Die Konstruktionen von gleichseitigen Dreiecken und Quadraten sind trivial.

II) Außerdem lässt sich die Konstruktion eines regelmäßigen $2^k \cdot n$-Ecks durch sukzessive Seitenhalbierung eines gegebenen n-Ecks erreichen.

III) Die Konstruktion eines $m \cdot n$ Ecks, wobei m und n Potenzen verschiedener Primzahlen sind, ist durch Addition von Winkeln ebenfalls möglich.

4.2 Konstruktion eines regelmäßigen 5-Ecks

Ein regelmäßiges 5-Eck ist genau dann konstruierbar, wenn der Innenwinkel von 72° konstruierbar ist.
Zur Reduktion von Schreibarbeit wollen wir folgende Bezeichnungsweisen vereinbaren.
Wir schreiben c_k bzw. s_k für $\cos k \cdot \phi$ bzw. $\sin k \cdot \phi$. Weiterhin wird $c_1 = c$ und $s_1 = s$ gesetzt.
Aufgrund der Tatsache, dass gilt: $\sin(5 \cdot 72°) = \sin(360°) = 0$ lässt sich der Sinus von 72° unter Zuhilfenahme der Additionstheoreme auf folgende Art berechnen:

$$
\begin{aligned}
s_5 &= s_{2+3} \\
&= s_2 c_3 + s_3 c_2 \\
&= 2cs \cdot c_{1+2} + s_{1+2}(c^2 - s^2) \\
&= 2cs(cc_2 - ss_2) + (sc_2 + s_2 c)(c^2 - s^2) \\
&= 2cs(c(c(c^2 - s^2) - s \cdot 2cs) + (s(c^2 - s^2) + 2cs \cdot c)(c^2 - s^2) \\
&= 5c^4 s - 10c^2 s^3 + 5s^5 \\
&= s(5 - 20s^2 - 16s^4)
\end{aligned}
$$

Da alle fünf möglichen Lösungen dieser Gleichung konstruierbar sind, ist auch der Sinus von 72° und somit das Fünfeck konstruierbar. Durch Betrachtungen am Einheitskreis lassen sich vier der fünf möglichen Lösungen ausschließen, wodurch feststeht:

$$\sin(72°) = \frac{\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}}{2}.$$

Für die einfachere Konstruktion wird daraus der Kosinus von 72° bestimmt:

$$\cos(72°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

5 Unmöglichkeitsbeweise

5.1 Zum Delischen Problem

Eines der drei klassichen Probleme der Antike ist Volumenverdopplung eines Würfels per Konstruktion. Wir können uns hierbei o.B.d.A. auf einen Würfel der Kantenlänge 1 beschränken. Zu konstruieren ist dann eine Strecke der Länge $\sqrt[3]{2}$.
Es bleibt die Frage: Ist $\sqrt[3]{2}$ rational und konstruierbar?

5.1.1 $\sqrt[3]{2}$ ist keine rationale Zahl

Angenommen es ist $\sqrt[3]{2} = m/n$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, wobei m und n ohne Einschränkung teilerfremd sind. Dann gilt $n^3 \cdot 2 = m^3$. Da 2 eine Primzahl ist, erhält man, dass 2 ein Teiler von m ist. Es gilt also $m = 2l$ und daher $n^3 = 4l^3$, d.h. 2 ist auch ein Teiler von n. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass m und n teilerfremd sind.

5.1.2 Die Nicht-Konstruierbarkeit von $\sqrt[3]{2}$

Um eine reelle Zahl zu konstruieren, benötigt man gemäß Abschnitt 2 eine Folge von Wurzeln, die in der algebraischen Darstellung dieser Zahl auftreten. Um diese Überlegungen zu mathematisieren, führen wir die folgenden Mengen K_n ein. Diese seien definiert durch

$$K_0 = \mathbb{Q} \qquad \text{und} \qquad K_n = \{a + b\sqrt{w_{n-1}} : a, b \in K_{n-1}\}$$

mit einem festen $w_{n-1} \in K_{n-1}$, für das $w_{n-1} > 0$ und $\sqrt{w_{n-1}} \notin K_{n-1}$ gilt. Die Folge $(K_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ hängt also von der Folge $(w_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ ab.

Die Mengen K_n sind abgeschlossen gegen Summen-, Differenzen-, Produkt- und Quotientenbildung: Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Die Behauptung ist für K_0 klar. Sei die Aussage für K_n wahr. Dann folgt mit $w = w_n$:

- $(a + b\sqrt{w}) + (c + d\sqrt{w}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{w}$
- $(a + b\sqrt{w}) \cdot (c + d\sqrt{w}) = (ac + bdw) + (ad + bc)\sqrt{w}$
- $(a + b\sqrt{w}) - (c + d\sqrt{w}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{w}$

- $\frac{a+b\sqrt{w}}{c+d\sqrt{w}} = \frac{(a+b\sqrt{w})(c-d\sqrt{w})}{c^2+d^2w} = \frac{(ac-bdw)+(bc-ad)\sqrt{w}}{c^2+d^2w} = \frac{ac-bdw}{c^2+d^2w} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2w}\sqrt{w}$

und die Induktionsannahme liefert aus $a, b, c, d \in K_n$ die Behauptung für K_{n+1}.

Unsere Herleitung besagt, daß jede konstruierbare Zahl z in einer der Mengen K_n zu finden ist. Insbesondere existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z \notin K_{n-1}$ und $z \in K_n$.

Satz. *$\sqrt[3]{2}$ ist nicht konstruierbar.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\sqrt[3]{2}$ konstruierbar ist. Wegen $\sqrt[3]{2}$ gibt es eine Folge $(K_n)_n$ mit $\sqrt[3]{2} \notin K_{m-1}$ und $\sqrt[3]{2} \in K_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Es ist $\sqrt[3]{2} = a + b\sqrt{w}$ mit $a, b, w \in K_{m-1}$, $w > 0$ und $\sqrt{w} \notin K_{m-1}$. Dann folgt

$$(a + b\sqrt{w})^3 - 2 = a^3 + 3a^2b\sqrt{w} + 3ab^2w + b^3w\sqrt{w} - 2 = c + d\sqrt{w}$$

mit $c = a^3 + 3ab^2w - 2 \in K_{m-1}$ und $d = 3a^2b + b^3w \in K_{m-1}$. Wegen $a + b\sqrt{w} = \sqrt[3]{2}$ folgt $c + d\sqrt{w} = 0$. Die Annahme $d \neq 0$ liefert $\sqrt{w} = -c/d \in K_{m-1}$, ein Widerspruch. Die Annahme $b = 0$ liefert $\sqrt[3]{2} \in K_{m-1}$, ein Widerspruch. Es gilt also $d = 0$ und $b \neq 0$. Damit erhält man $w = -3a^2/b^2 \leq 0$, ein Widerspruch.

5.2 Das Trisektions-Problem

Hier geht es um die Frage, ob es möglich ist, nur mit Zirkel und Lineal einen beliebig vorgegebenen Winkel in drei gleich große Teile zu unterteilen. Dieses Problem wurde im antiken Griechenland gestellt und galt lange Zeit als unlösbar.
Wir haben gezeigt: Der konstruierbare (!) Winkel 120° lässt sich nicht dritteln, d.h. ein Winkel der Größe 40° ist nicht konstruierbar.
Analog zu Abschnitt 4.2 lassen sich Drittelungsformeln für die Kreisfunktionen herleiten. Setzen wir $c := \cos 40°$, so ist zu lösen

$$-\frac{1}{2} = \cos 120° = 4c^3 - 3c.$$

Alle Nullstellen dieser Gleichung, die sich explizit angeben lassen, enthalten jedoch den Faktor $\sqrt[3]{2}$, was nach unserem Konstruktionskriterum die Nichtkonstruierbarkeit von c liefert.

6 Quasikonstruktionen

Da wir festgestellt haben, dass nicht alle Zahlen mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, untersuchen wir nun, inwiefern sich der Raum der konstruierbaren Punkte erweitert, wenn mehr Hilfsmittel zugelassen werden.

Konkret fügen wir der Zeichenebene eine zusätzliche polynomiale Kurve mit rationalen Koeffizienten hinzu, mit Hilfe derer ebenfalls Schnittpunkte bestimmt werden dürfen. Sich so ergebende Punkte nennen wir quasikonstruierbar.

Wir haben bewiesen, daß eine reelle Zahl genau dann quasikonstruierbar ist, wenn sie über $\mathbb{Q}$ algebraisch, d.h. Nullstelle eines nichtkonstanten Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

6.1 Quasikonstruktionen mit der Normalparabel

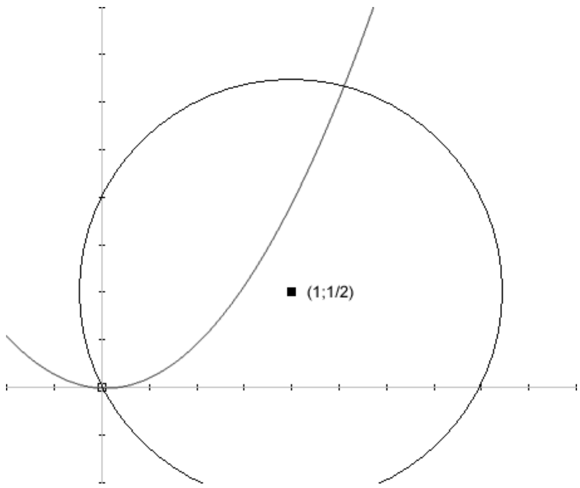
Wir fügen der Zeichenebene im folgenden die Normalparabel $y = x^2$ hinzu.

6.1.1 $\sqrt[3]{2}$ ist konstruierbar!

Wir konstruieren einen Kreis mit Mittelpunkt $(1, \frac{1}{2})$, der durch den Ursprung geht. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Normalparabel genügen den Gleichungen

$$y = x^2 \qquad \text{und} \qquad (x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}.$$

Deren Koordinaten sind dann $(0,0)$ und $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$.



6.1.2 Das Trisektionsproblem ist lösbar!

Hier verwenden wir dieselbe Idee aus dem vorherigen Abschnitt. Bezeichnet C den Cosinuswert des vorgegebenen, zu drittelnden Winkels φ, so schneidet der Kreis mit dem konstruierbaren Mittelpunkt $(\frac{C}{8}, \frac{7}{8})$, der durch den Ursprung verläuft, die Normalparabel in einem Punkt mit den Koordinaten $(\cos \frac{\varphi}{3}, \cos^2 \frac{\varphi}{3})$.

7 Abzählbarkeit und Nichtkonstruierbarkeit von $\mathbb{R}$

Hier stellen wir uns die Frage, ob man durch Quasikonstruktionen alle reellen Zahlen konstruieren kann. Das Resultat wird negativ ausfallen; für den Beweis sind jedoch einige Vorarbeiten nötig.

7.1 Abzählbare Mengen

Wir nennen eine Menge M abzählbar, wenn man jedem Element aus M eine natürliche Zahl zuordnen kann, so daß verschiedenen Elementen aus M verschiedene natürliche Zahlen zugeordnet werden.

Satz. *$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.*

Beweis. Wir definieren $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ durch $\varphi(1) = 0$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = -1$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = -2$, …und $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ durch folgendes Schema

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
m/n & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \dots \\
\hline
1 & 1/1 & \rightarrow & 2/1 & & 3/1 & \rightarrow & 4/1 & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
2 & 1/2 & & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
3 & 1/3 & & 2/3 & & 3/3 & & 4/3 & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
4 & 1/4 & \rightarrow & 2/4 & & 3/4 & & 4/4 & \dots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

sowie die Hinzunahme der Null und dem analogen Schema für negative Zahlen, wobei man bereits gezählte Elemente aus $\mathbb{Q}$ auslässt.

Weiter gilt

Satz. *Die Menge der Polynome mit rationalen Koeffizienten ist abzählbar.*

Beweis. Polynome nullten Grades sind quasi die Menge $\mathbb{Q}$. Die Anzahl der Polynome ersten Grades ergibt sich aus der Variation der Koeffizienten, welche beide aus der Menge $\mathbb{Q}$ dargestellt werden. Hier lässt sich auch wieder das Cantorsche Diagonalverfahren anwenden. Bei Polynomen zweiten Grades werden die abzählbare Menge des ersten Grades wieder mit $\mathbb{Q}$ kombiniert, wobei durch die Kombination zweier abzählbarer Mengen eine abzählbare Menge entsteht. Per Induktion folgt, dass die Menge aller Polynome festen Grades abzählbar ist. Da man diese abzählbaren Mengen nebeneinander schreiben kann, lässt sich wieder das Cantorsche Diagonalverfahren anwenden.

7.2 Überabzählbarkeit

Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt zeigen wir nun, dass $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Wir verwenden hierzu das bekannte Cantorsche Diagonalverfahren:
Beweis: Wir zeigen, dass die Menge $[0,1] \subset \mathbb{R}$ nicht abzählbar ist. Jede reelle Zahl besitzt eine eindeutige Dezimaldarstellung. Die Annahme, dass $[0,1]$ abzählbar ist, liefert, dass die Folge

$$\begin{gathered} 0,\ a_{11}\, a_{12}\, a_{13}\ \cdots \\ 0,\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23}\ \cdots \\ 0,\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33}\ \cdots \end{gathered}$$

usw. mit $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ alle Zahlen aus $[0,1]$ ausschöpft. Die Zahl $0, b_1\, b_2\, b_3 \cdots$ mit $b_i \neq a_{ii}$ ist aus $[0,1]$, aber nicht Teil der Folge – ein Widerspruch.

7.3 Keine Quasikonstruktion erzeugt $\mathbb{R}$

Jede quasikonstruierbare Zahl ist Nullstelle eines Polynoms n-ten Grades. Die Menge aller quasikonstruierbarern Zahlen ist also abzählbar. Somit gibt es keine Quasikonstruktion, die $\mathbb{R}$ erzeugt.

8 Weiterführende Betrachtungen

Wir haben mit Hilfe einer Fehlerabschätzung der Expontentialreihe in einem Widerspruchsbeweis gezeigt, dass die Zahl e irrational ist. Weiterhin haben wir gezeigt bekommen, dass die Kreiszahl π irrational ist.