Monotonieverhalten von Funktionen in der mathematischen Qualitätssicherung

Manfred Börgens 8/2000

Problems worthy of attack
prove their worth by fighting back.

Zitat von Paul Erdös,
vorher verwendet von Piet Hein,
vermutlich aber noch älter.

Hallo, Sie da! Dies ist ein Aufruf! Bitte weiterlesen!

Seit 1993 beschäftige ich mich in Forschung und Lehre mit Anwendungen von Mathematik und Statistik im Qualitätswesen. Die Erträge dieser Arbeit ([1] - [9] sowie 12 Diplomarbeiten) stellen mich nicht ganz zufrieden. Zwar sind die Ergebnisse in der industriellen Praxis anwendbar und auch programmtechnisch umgesetzt, aber mir bleibt die *mathematische Struktur* einiger Teile des Arbeitsfeldes dunkel. Dies ist nun ein Aufruf an interessierte Kolleginnen und Kollegen, an diesen Problemen mitzuarbeiten.

Steilkurs über Annahmestichprobenprüfung

Aus *Losen*, die in immer gleicher Größe und unter gleichbleibenden Produktionsbedingungen in großer Zahl hergestellt werden, werden zufällige *Stichproben* immer gleichen Umfangs pro Los gezogen. Für die Lose wird ein *Gut/Schlecht-Kriterium* (G/S) festgelegt, dessen Überprüfung in der Regel dem Hersteller nicht möglich ist, da er ja keine Vollkontrolle, sondern nur eine Stichprobenprüfung durchführt. G oder S offenbart sich also erst dem Kunden. Für die Stichproben wird ein Kriterium festgelegt, das entweder zur *Annahme* (A) oder zur *Zurückweisung* (Z) des gesamten Loses führt.

Diese Ausgangssituation führt nun zu einer Vielzahl von Varianten in betrieblichen Umgebungen, von denen die wichtigsten kurz erwähnt werden sollen:

→ *Qualität der Lose: Diskret oder kontinuierlich?*
Diskrete Lose bestehen aus N Einzelstücken, kontinuierliche Lose umfassen Flüssigkeiten, Garne, Textilien, Bleche, Pulver usw.

→ *Behandlung der angenommenen Lose*

Angenommene Lose werden grundsätzlich zur Auslieferung freigegeben. Dies kann geschehen, indem das Los völlig unverändert bleibt oder aber die Stichprobe von Fehlern bereinigt wird (was nicht immer möglich ist).

→ *Behandlung der zurückgewiesenen Lose*

Auf die Zurückweisung eines Loses aufgrund des Ergebnisses der Stichprobe kann ein Betrieb sehr unterschiedlich reagieren. Gängige Verfahren sind z.B. Vollkontrolle des Loses mit oder ohne Fehlerbereinigung oder sofortige Elimination aus dem Produktionsprozess.

→ *Abbrechende oder nicht-abbrechende Stichprobennahme*

Aus diskreten Losen werden n Stichprobenstücke genommen, aus kontinuierlichen Losen ein Stichprobenanteil $0<r<1$. Das Entscheidungskriterium für A/Z wird dann durch die *Annahmezahl* c festgelegt: Bis max. c Fehlern oder fehlerhaften Stücken in der Stichprobe wird das Los angenommen, ansonsten zurückgewiesen. Das Paar (n,c) oder (r,c) nennt man *Prüfplan*. Eine *abbrechende Stichprobennahme* liegt vor, wenn A oder Z bereits vor dem Erreichen von n oder r feststeht und der Rest ungeprüft bleibt. Oft wird aber (scheinbar unnötigerweise) auch der Rest geprüft; diese *nicht-abbrechende Stichprobennahme* wird häufig verwendet, wenn Stichproben nicht nur das Schicksal der Lose bestimmen sollen, sondern zusätzlich der *statistischen Prozesskontrolle* dienen.

→ *Beherrschte/nichtbeherrschte Prozesse*

Ein beherrschter (Produktions-)Prozess liegt vor, wenn fehlerhafte Stücke (in diskreten Losen) bzw. Fehler (in kontinuierlichen Losen) nur *zufällig* auftreten. Das bedeutet, es muss eine bekannte Ausschussrate p bzw. λ geben, so dass jedes produzierte Stück mit W'keit p fehlerhaft ist (→ Binomialverteilung) bzw. λ die im Mittel zu erwartende Fehlerzahl ist (→ Poisson-Verteilung). Manche Produktionsprozesse weisen diese Eigenschaft nicht auf, weil wechselnde systematische Störungen auftreten. Statt p oder λ wird dann als Basisgröße auf die (absolute) *Fehlerzahl* k zurückgegriffen (→ hypergeometrische Verteilung). k ist natürlich a priori unbekannt und findet deshalb im wesentlichen bei bedingten W'keiten Anwendung. Mit Hilfe von k lässt sich jetzt auch nachtragen, wie sich G/S-Kriterien formulieren lassen. In Qualitätssicherungsvereinbarungen zwischen Herstellern und Kunden kann man *Reklamationsgrenzen* M festlegen. Dann gilt ein Los mit $k<M$ als gut, ansonsten als schlecht. Eine andere Variante kommt aus der DIN ISO 2859: Dort ist M als AQL (*acceptable quality level*) oder als LQ (*limiting quality*) definiert. Beide Begriffe stammen aus dem Paläozoikum der Qualitätssicherung (QS); die ISO-Norm stellt

Prüfpläne auf, die für k<AQL „fast immer“ zur Annahme bzw. für k>LQ „fast immer“ zur Zurückweisung des Loses führen. Dieser Ansatz hat den schweren Nachteil, dass wegen der Nichtberücksichtigung der tatsächlichen Qualitätslage im Produktionsprozess fast immer suboptimale (d.h. „zu teure“) Prüfpläne verwendet werden.

Noch eine Bemerkung zu den genannten W'keitsverteilungen: In der Literatur wird oft der Kunstfehler begangen, diese Verteilungen durch „einfachere“ zu approximieren, z.B. die hypergeometrische durch die Binomialverteilung oder die Binomial- bzw. Poisson-Verteilung durch die Normalverteilung. Dabei wird ignoriert, dass diese Approximationen um so schlechter sind, je weiter man sich auf der Abszisse vom Erwartungswert entfernt; gerade aber die hohen (relativen) Abweichungen an den „Enden“ der Verteilungen verfälschen bei den relevanten Funktionen in der QS die Ergebnisse heftig.

Monotonieverhalten von QS-Funktionen

Typische Probleme der mathematischen Qualitätssicherung sollen anhand eines (diskreten) Beispiels verdeutlicht werden.

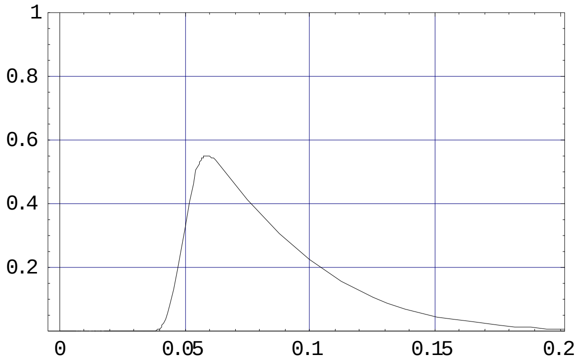
Der Fall $S \cap A$ ist der „unangenehmste“ (für Hersteller und Kunden) von allen; gemeint ist das Ereignis „Los schlecht *und* angenommen“ (also M oder mehr fehlerhafte Stücke unter den N Stücken im Los, aber höchstens c fehlerhafte Stücke unter den n Stichprobenstücken). Die zugehörige W'keit beträgt in einem beherrschten Prozess mit einer Ausschussrate p (ohne Stichprobenbereinigung)

$$\mathbf{p(S \cap A) = \sum_{i=0}^{c} b_{p,n}(i) \cdot \left(1 - B_{p,N-n}\left(M - 1 - i\right)\right)}$$

Dabei steht b für die Binomialverteilung und B für ihre Verteilungsfunktion mit den Parametern p und n (bzw. N-n).

Nun tritt im Rahmen von (naheliegenden!) Optimalitätsproblemen die Frage auf: Welche Prüfpläne (n,c) erfüllen $\mathbf{p(S \cap A)} \le \alpha$? Wollte man alle Prüfpläne daraufhin durchrechnen, müsste obige Formel $\mathbf{M \cdot \left(N - \frac{M-1}{2}\right)}$-mal ausgewertet werden, andere Funktionen in der QS benötigen sogar $\mathbf{\frac{N^2}{2}}$ Funktionswertberechnungen (Hinweis: In der Industrie ist N = 20.000 oder mehr durchaus nicht ungewöhnlich). Also benötigt man OR-Methoden, die die Suche nach „erlaubten“ Prüfplänen im Aufwand stark reduzieren. Solche Methoden gibt es (siehe [3], [4], [9]; im nächsten Abschnitt komme ich darauf zurück), allerdings müssen dafür zwei *Monotonieeigenschaften für die QS-Kennzahl* $p(S \cap A)$ nachgewiesen werden: $p(S \cap A)$ fällt monoton mit n und wächst monoton mit c (umgekehrt ginge auch, trifft aber auf *diese* QS-Kennzahl nicht zu).

Für industrielle Anwendungen weniger interessant, aber für den Mathematiker spannend ist die Frage: Wie hängt $p(S \cap A)$ von p ab? Empirisches Ergebnis: Alle Prüfpläne aus der DIN ISO 2859 zeigen einen Funktionsverlauf von $p(S \cap A) = 0$ für $p = 0$ über genau ein Maximum zu $p(S \cap A) = 0$ für $p = 1$. Die folgende Skizze gilt für $N = 2000$, $(n,c) = (40,2)$ und $M = 100$.



Gelöste Probleme

Die QS-Literatur - auch die mathematisch orientierte - bietet äußerst wenig zur Behandlung der im vorigen Abschnitt aufgeworfenen Fragen. Man mache sich klar, dass wegen der zahlreichen betrieblichen Szenarien (siehe Abschnitt „Steilkurs") auch viele verschiedene Formeln für QS-Kennzahlen wie $p(S \cap A)$ aufzustellen und auf Monotonie bzgl. n (oder r), c und evtl. p zu untersuchen sind. In der Literatur habe ich lediglich Hinweise für p(A) (also die Annahmew'keit) im nichtbeherrschten Fall gefunden.

Dass $p(S \cap A)$ aus dem vorigen Abschnitt mit c wächst, ist offensichtlich. Aber wieso fällt $p(S \cap A)$ mit n? Ein Weg, dies zu beweisen, führt über eine Umformung der obigen Formel zu der folgenden:

$$\mathbf{p(S \cap A) = \sum_{k=M}^{N} b_{p,N}(k) \cdot H_{N,k,n}(c)}$$

H steht für die Verteilungsfunktion der hypergeometrischen Verteilung mit den Parametern N,k,n.

Da sich nachweisen lässt, dass $\mathbf{H_{N,k,n}(c) \geq H_{N,k,n+1}(c)}$ gilt, ist der Beweis vollständig. - Diese beiden Monotonieeigenschaften erlauben nun eine „schnelle" Behandlung des Problems „*Welche Prüfpläne* (n,c) *erfüllen* $\mathbf{p(S \cap A) \leq \alpha}$ *?*" in maximal $\mathbf{M \cdot \log_2 N}$ Schritten statt in $\mathbf{M \cdot \left(N - \frac{M-1}{2}\right)}$ (was für das Beispiel am Ende des vorigen Abschnitts eine Verringerung von 195.050 auf maximal 1.097 bedeutet).

Viel schwieriger (jedenfalls für mich) ist der entsprechende Beweis für die vielleicht wichtigste QS-Kennzahl, nämlich das *Reklamationsrisiko*

$$p(S|A) = \frac{p(S \cap A)}{p(A)} = \frac{\sum_{i=0}^{c} b_{p,n}(i) \cdot \left(1 - B_{p,N-n}(M-1-i)\right)}{B_{p,n}(c)} .$$

Um es kurz zu machen: Für alle industriell relevanten QS-Kennzahlen (u.a. *Rückweisequote* p(Z), *Reklamationsrisiko* (s.o.), *Durchschlupf* (Erwartungswert der ausgelieferten fehlerhaften Stücke oder Fehler pro Los), *durchschnittlicher Prüfaufwand*) haben sich die Monotonieeigenschaften für (n,c) bzw. (r,c) nachweisen lassen und erlauben somit eine schnelle Behandlung der zugehörigen Optimierungsprobleme.

Ungelöste Probleme

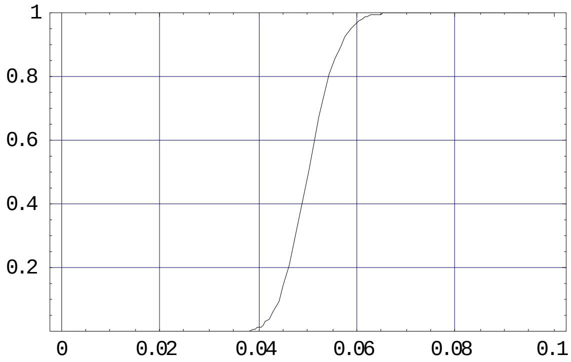
Nun also zum eigentlichen Anliegen dieser Schrift. Wie steht es um das Monotonieverhalten von QS-Kennzahlen, wenn man p oder λ oder k als unabhängige Variable wählt? Ich habe nicht feststellen können, dass sich jemand bisher dieser Frage angenommen hätte, möchte aber zunächst begründen, warum es sich doch nicht um ein rein innermathematisches Problem handelt. In Industrieprojekten bin ich auf das Phänomen gestoßen, dass die Betriebe sich manchmal nicht in der Lage sahen, die Qualitätslage ihrer eigenen Produkte (also p oder λ) zu bestimmen. Die QS-Ingenieure müssen dann mit Angaben wie $p_1 \le p \le p_2$ oder $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$ auskommen.

Glücklicherweise lässt sich leicht zeigen, dass sich die im vorigen Abschnitt vorgestellten Monotonieeigenschaften in gewisser Weise auf solche Intervallangaben *vererben*: Wächst/fällt nämlich der QS-Kennwert XY mit n (oder r oder c), so auch $\max\limits_{p \in [p_1, p_2]} XY$ oder $\min\limits_{p \in [p_1, p_2]} XY$ (analog für λ).

Das ist schön, aber: *Wo liegt das Extremum?*

Man sieht: Die Bestimmung dieser Monotonieeigenschaften kann auch für die Anwendungen von Interesse sein. Wenn man beispielsweise wüsste, dass XY monoton wächst, liegt das Maximum immer bei p_2. Aber abgesehen von dem beschriebenen Anwendungsproblem ist es natürlich unbefriedigend, mit relativ einfachen Funktionen umzugehen, deren elementare mathematische Eigenschaften nicht ausreichend bekannt sind.

Man schaue sich zwei wichtige Beispiele an, die oben schon besprochenen QS-Kennzahlen $p(S \cap A)$ und $p(S|A)$ (hier der Einfachheit halber nur für diskrete Lose ohne Stichprobenbereinigung). Eine Skizze für $p(S \cap A)$ steht schon weiter oben; $p(S|A)$ scheint generell streng monoton von 0 nach 1 zu steigen (empirisch), siehe die folgende Skizze für N = 2000, (n,c) = (40,2) und M = 100.



Die Bestimmung des Kurvenverlaufs mit p als unabhängiger Variablen erfordert also bei $p(S \cap A)$ (*dies ist ein Polynom in p !*) den Nachweis, dass genau ein Extremum existiert und wo dieses liegt. Dass beide Randwerte 0 sind, lässt sich ohne große Mühe zeigen. Bei $p(S|A)$ (*gebrochen-rational in p !*) sind ebenfalls die Randwerte 0 und 1 beweisbar, aber es fehlt der Beweis für die Monotonie. Auch hier lassen sich Zähler und Nenner

umformen, vielleicht hilft das: $$\mathbf{p}(\mathbf{S}|\mathbf{A}) = \frac{\sum_{k=M}^{N-n+c} b_{p,N}(k) \cdot H_{N,k,n}(c)}{\sum_{k=0}^{N-n+c} b_{p,N}(k) \cdot H_{N,k,n}(c)}$$

Eigentlich müsste es doch möglich sein, für diese Funktion die Monotonie in p nachzuweisen.
Ein denkbarer Beweisansatz für die beiden QS-Kennzahlen könnte über die unvollständige Beta-Funktion gehen.

Auch Teilergebnisse sind willkommen, z.B. nur der Ordinatenwert oder eine obere/untere Abschätzung für das Maximum von $p(S \cap A)$, oder der Nachweis, dass es genau ein Maximum gibt (ohne Angabe der Position).

Mit diesen beiden Funktionen habe ich *exemplarisch* nur zwei QS-Kennzahlen von vielen herausgegriffen. Ich bin aber der Auffassung, dass ein Beweisansatz für das Monotonieverhalten dieser Funktionen sehr wahrscheinlich den Weg für die anderen weisen würde. Denn in allen Fällen, in denen das Monotonieverhalten von QS-Kennzahlen in Abhängigkeit von p, λ oder k unbekannt ist, handelt es sich um Polynome oder gebrochen-rationale Funktionen.

Möchten Sie mitmachen?

Alle im folgenden aufgeführten Referenzen sind auch beim Autor erhältlich.

[1] **Moderne statistische Methoden der Qualitätssicherung vor dem Hintergrund der ISO 9000**
Transfer (Informationsdienst des Transferzentrums Mittelhessen) 6 (1994)

[2] **Statistische Kontrolle ermöglicht moderne Qualitätssicherung**
Drucksache (FH Gießen-Friedberg) 7 (2/1994), S. 7

[3] **Optimierungsverfahren und Risiko-Kennwerte für Stichprobenprüfung und Kostenrechnung**
in: G. Benes, F.-K. Feyerabend, U. Vossebein (Hrsg.): Qualitätsmanagement als interdisziplinäres Problem, Deutscher Universitäts-Verlag 1997

[4] **Mathematische Methoden der Qualitätssicherung**
gedrucktes Vorlesungsmanuskript, FH Gießen-Friedberg (1997)

[5] **Prozeßkennzahlen und Qualitätsregelkarten bei attibutiven Merkmalen**
Der Qualitätssicherungs-Berater 11210 (1998), TÜV-Verlag

[6] **Kostenoptimierung bei der Stichprobenprüfung**
Der Qualitätssicherungs-Berater 11220 (1998), TÜV-Verlag

[7] **Entwicklung einer Systematik zur Optimierung der Fähigkeit von Beschichtungsprozessen, Maschinen und Prüfmitteln in kleinen und mittelständischen Unternehmen der Metallveredelung, orientiert an den Forderungen der QS-9000 und VDA 6.1**
(gemeinsam mit S. Behlert, M. Cziudaj, S. Lenz, A. Rothenbücher, F. Tscherney)
RKW-Verlag 1998

[8] **Aufgabensammlung Statistik – mit Beispielen aus der mathematischen Qualitätssicherung** (mit Hinweisen, Ergebnissen und Lösungen in Einzelschritten)
http://sirius.fh-friedberg.de/sirius_start.htm (LernAss)

[9] **Stichprobenprüfung in beherrschten und nichtbeherrschten Prozessen – Beispiele und Formeln für Attributprüfung mit Anwendungen auf DIN ISO 2859** Shaker Verlag 2000
auch online: *http://www.shaker.de*