Berechnung des Erdradius

Wie hat es Eratosthenes gemacht?
Wie man es auch anders machen kann.

Manfred Börgens

Kommentare zu diesem Beitrag

Kommentare per E-Mail an: manfred@boergens.de

Blog   Liste aller Einträge

Leitseite

Index der gesamten Website

Kategorie Geomathematik

Prolog. Eratosthenes

Der griechische Mathematiker Eratosthenes hat vor mehr als 2200 Jahren den Umfang der Erde (und damit den Radius) mittels einer genialen Methode vermessen, wahrscheinlich als erster. Er war Leiter der berühmten Bibliothek von Alexandria in Ägypten. Im Süden Ägyptens lag am Nil die Stadt Syene (das heutige Assuan). Diese beiden Städte nahm Eratosthenes als Bezugspunkte für seine Messung. Er ging dabei von den empirisch gestützten Annahmen aus, dass Alexandria und Syene auf demselben Meridian liegen und dass Syene auf dem nördlichen Wendekreis liegt. Außerdem war die Entfernung der beiden Städte bekannt. In Bild 0.1. sieht man Eratosthenes' mathematisches Modell: Ein Schnitt durch die Erdkugel entlang des betrachteten Meridians, auf dem in Syene bei Sommeranfang die Sonne senkrecht steht, während sie in Alexandria um den (von ihm gemessenen) Winkel $\alpha = 7,2°$ vom Zenit abweicht. Wegen der Parallelität der Sonnenstrahlen findet sich dieser Winkel auch als Mittelpunktswinkel wieder, und zwar als Winkelmaß für den Abstand der beiden Städte. Der fett gezeichnete Bogen zwischen Alexandria und Syene (also die Weglänge zwischen den Städten) war somit von Eratosthenes als 1/50 des Erdumfangs bestimmt worden. Und das stimmt ziemlich gut! Eratosthenes hat die Entfernung zwischen Alexandria und Syene sowie den Erdumfang in *Stadien* angegeben. Die genaue Länge der damals in Ägypten verwendeten Einheit *Stadion* ist nicht bekannt. In heutigen Maßeinheiten würde man mit Eratosthenes' Methode auf einen Umfang von ca. 42.000 km kommen.

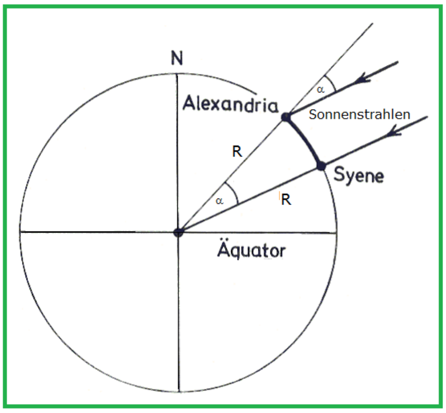


Bild 0.1. Mathematisches Modell des Eratosthenes zur Berechnung des Erdumfangs (nicht maßstäblich)

Eratosthenes hat im 3. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung gelebt. Die griechischen Gelehrten gingen schon lange vor ihm von der Kugelgestalt der Erde aus. Es ist ein Mythos, dass damals - und noch später im Mittelalter - die gängige Meinung eine flache Erde annahm.

Eratosthenes' Messung und Berechnung wies einige systematische Abweichungen auf. Seine Grundannahmen - Kugelgestalt der Erde und Parallelität der Sonnenstrahlen - stimmen nur ungefähr. Außerdem liegt Syene nicht genau auf dem Meridian von Alexandria und auch nicht genau auf dem nördlichen Wendekreis.

1. Eine andere Idee

Eratosthenes' Überlegung und Ausführung der Berechnung des Erdradius ist natürlich auch in unserer Zeit wiederholbar. Könnte man es auch anders machen? Dazu erschien eine überraschende und interessante Idee in dem sehr empfehlenswerten Blog von Colin Wright [1], die dort in mehreren Etappen ausgeführt wurde (man kann mit dem Beitrag [2] einsteigen und danach die früheren Beiträge lesen) und auch im ebenfalls empfehlenswerten Blog von Colin Beveridge [2] diskutiert wurde, siehe [4].

Die Idee ist die folgende : Muss man wirklich Messungen an zwei verschiedenen Orten vornehmen? Oder geht das auch lokal? Es beginnt mit der Vermutung, dass die Zeit, die die Sonnenstrahlen bei Sonnenaufgang benötigen, um von der Spitze eines Pfahls am Meeresstrand bis zum Fuß des Pfahls (oder bis zu einem Punkt dazwischen) zu wandern, vom Radius der Erde abhängt. Als bekannt könnte man dabei das Datum und den Breitengrad des Beobachters voraussetzen.

Diese Idee hat sich inzwischen als mathematisch durchführbar erwiesen. In den Abschnitten 4. und 5. wird gezeigt, wie man es machen kann.

2. Geozentrische Koordinaten

Den folgenden Abschnitten liegt ein geozentrisches Modell [5] zugrunde. Dieses Modell verwendet sphärische Trigonometrie und ermöglicht die Darstellung der relativen Positionen von Erde und Sonne in besonders einfacher Weise. In diesem Modell kennt man *äquatoriale* [6] und *horizontale* [7] Koordinaten, die in Abschnitt 5. erklärt werden. Das geozentrische Modell ist geometrisch äquivalent zu anderen astronomischen Modellen, insbesondere zum heliozentrischen Modell mit der Sonne als Mittelpunkt. Was die Relativbewegung Erde - Sonne angeht, sind beide Modelle gleichwertig.

In den Bildern in den Abschnitten 4. und 5., die sowohl die Erde als auch die Sonne zeigen, wird das geozentrische Modell gut deutlich. Für die Berechnung des Erdradius sollen einige vereinfachende Annahmen gemacht werden. Die "Himmelskugel"hat die vereinfacht als punktförmig dargestellte Erde als Mittelpunkt; auf der Kugeloberfläche bewegt sich die Sonne, die ebenfalls (vereinfacht) punktförmig ist. Zu den Äquinoktien beschreibt die Sonne einen Großkreis, ansonsten einen Kleinkreis, dessen Ebene parallel zur Ebene des Großkreises liegt. - Die Abweichungen dieses vereinfachten Modells von der Realität fallen bei den Berechnungen in diesem Beitrag nur unwesentlich ins Gewicht. Die Himmelskugel ist in Wirklichkeit keine perfekte Kugel, da der Abstand Erde - Sonne leicht variiert. Auch die Punktförmigkeit von Erde und Sonne ist natürlich nur deswegen gerechtfertigt, weil der Radius dieser Körper gegenüber dem Radius der Himmelskugel sehr klein ist.

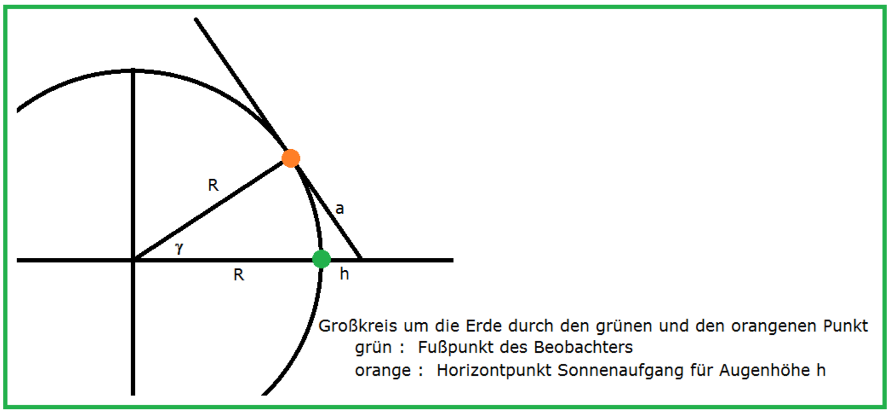
3. Entfernung des Horizonts

In Bild 3.1. ist die Situation skizziert, dass für Augenhöhe h der Sonnenaufgang am Meeresstrand beobachtet wird. Im oberen Bild sind der Erdradius R, die Horizontentfernung a und der zugehörige Winkel γ eingetragen. Im unteren Bild wird verdeutlicht, dass γ der Winkel ist, mit dem die Sonne unter der Tangentialebene am Fußpunkt des Beobachters steht.

(3.1) $a = \sqrt{2Rh + h^2} \approx \sqrt{2Rh}$ (Näherung für kleine h)

(3.2) $\sin\gamma = \dfrac{a}{R+h}$ $\qquad \gamma \approx \sin\gamma = \dfrac{\sqrt{2Rh+h^2}}{R+h}$ (Näherung für kleine γ)

(3.3) $\gamma \approx \sqrt{\dfrac{2h}{R}}$ im Bogenmaß (Näherung für kleine γ, h)



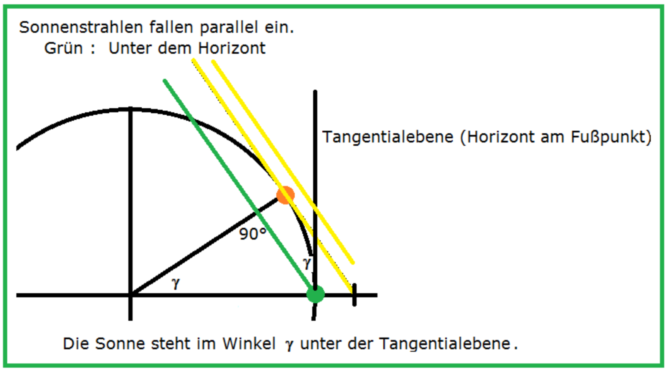


Bild 3.1. Horizont

Genau genommen müsste γ negativ genommen werden, da die Sonne unter der Horizontebene steht. Hier spielt das keine Rolle, wird aber in Abschnitt 5. entsprechend korrigiert.

4. Berechnung des Erdradius zur Tag- und Nachtgleiche

Bild 4.1. zeigt in vereinfachter Form die Perspektive eines Beobachters A auf Meeresniveau. Für ihn geht die Sonne am Schnittpunkt des Horizonts mit dem Pfad der Sonne auf der Himmelskugel auf. Der Aufgangswinkel $90° - \phi$ hängt in guter Näherung nur vom Breitengrad ϕ eines Beobachters A ab, aber nicht von der Jahreszeit. Die orangenen Linien beziehen sich auf den Stand der Sonne zu dem Zeitpunkt, wenn ein Beobachter B an derselben Uferstelle, aber in Augenhöhe h die Sonne aufgehen sieht. Zu diesem Zeitpunkt steht die Sonne für Beobachter A noch unter dem Horizont und beschreibt den Pfad β zwischen den beiden Sonnenaufgängen für B und A.

β und γ in Bild 4.1. sind Kurvenstücke auf der Himmelskugel. Dafür ist sphärische Trigonometrie anzuwenden; dort werden Stücke von Großkreisen als Winkel angegeben. Nach Bild 4.2. ist das aber nur der Fall, wenn die Sonnenbahn (grün-orange) den Äquator der Kugel bildet, also zur Tag- und Nachtgleiche (Deklination $\delta = 0$). Nur dieser Fall soll in diesem Abschnitt behandelt werden. (In Bild 4.2. verläuft die Sonnenbahn etwas nördlicher auf einem Kleinkreis; dieser Fall wird in Abschnitt 5. behandelt.)

Die sphärische Trigonometrie liefert $cos\ \phi = tan\ \gamma / \tan\ \beta \approx \gamma/\beta$ für kleine Winkel; diese Näherung entspricht dem Ergebnis aus der ebenen Trigonometrie. Nun ist alles für die Berechnung von R vorbereitet.

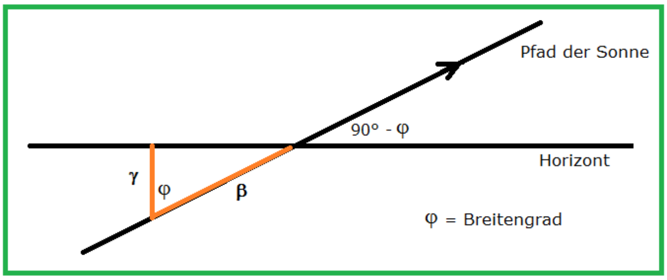


Bild 4.1. Sonnenaufgang

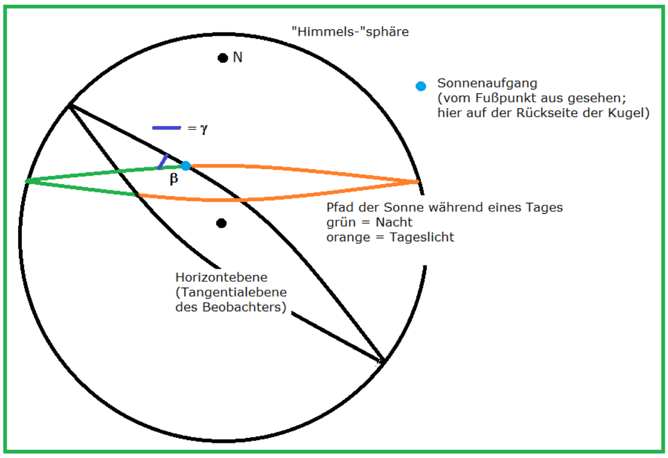


Bild 4.2. Himmelskugel

(4.1) $\beta = \dfrac{\gamma}{cos\ \phi} \ \approx\ \dfrac{\sqrt{2h/R}}{cos\ \phi}$ (Bild 4.1. und (3.3))

(4.2) $t = \dfrac{\beta}{2\pi} \ \approx\ \dfrac{\sqrt{h/2R}}{\pi\ cos\ \phi}$

(4.3) $R \ \approx\ \dfrac{h}{2\pi^2\ cos^2\phi\ \ t^2}$ $\qquad U \ \approx\ \dfrac{h}{\pi\ cos^2\phi\ \ t^2}$

(4.4) $R \ \approx\ \dfrac{(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2}{2\pi^2\ cos^2\phi\ \ (t_1 - t_2)^2}$ $\qquad U \ \approx\ \dfrac{(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})^2}{\pi\ cos^2\phi\ \ (t_1 - t_2)^2}$

In [2] kommt Colin Wright zum selben Ergebnis, aber auf einem anderen Weg.

5. Allgemeine Berechnung des Erdradius

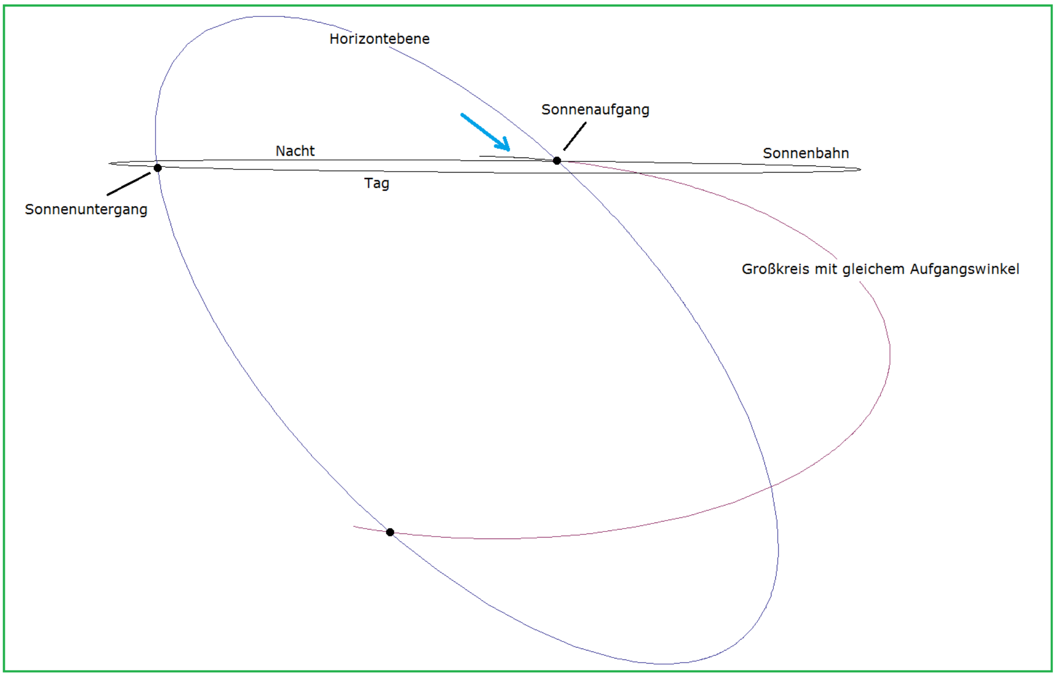


Bild 5.1. Horizontebene und Sonnenbahn

Für $\delta \neq 0$ kann Bild 4.1. nicht mehr verwendet werden. Bild 5.1. zeigt, warum das so ist: Der Pfad der Sonne in Bild 4.1. ist dann kein Großkreis auf der Himmelskugel, sondern der in Bild

4.2. und in Bild 5.1. eingezeichnete Kleinkreis. Dort weist der blaue Pfeil auf die kritische Stelle. Legte man weiterhin Bild 4.1. zugrunde, so würde man statt der Sonnenbahn fälschlicherweise einen Großkreis mit gleichem Aufgangswinkel (also $90° - \phi$) in den weiteren Rechnungen verwenden. Dieser Großkreis (den wir nicht benutzen dürfen) ist ebenfalls in Bild 5.1. skizziert. – Es bedarf also eines anderen Ansatzes als in Abschnitt 4. Wir werden äquatoriale und horizontale Koordinaten verwenden.

Im **Äquatorialsystem** wird die Stellung der Sonne durch die *Deklination* $\delta \in [-23,43°,+23,43°]$ und die *Tageszeit* $\tau \in [\,0°,360°)$ angegeben; Bild 5.1. entspricht diesem System.

Kartesische Koordinaten im Äquatorialsystem:

$\tilde{x} = -cos\ \delta\ cos\ \tau$
$\tilde{y} = cos\ \delta\ sin\ \tau$
$\tilde{z} = sin\ \delta$

Im **Horizontalsystem** liegt die Horizontebene waagerecht, also gegenüber Bild 5.1. um $90° - \phi$ gekippt. Die Stellung der Sonne wird hier durch ihre *Höhe* $\gamma \in [\,-90°,+90°]$ über oder unter der Horizontebene und ihre *Himmelsrichtung* $A \in [\,0°,360°)$ aus Sicht des Beobachters angegeben.

Kartesische Koordinaten im Horizontalsystem:

$x = -cos\ \gamma\ cos\ A$
$y = cos\ \gamma\ sin\ A$
$z = sin\ \gamma$

Umrechnung der kartesischen Koordinaten:

$x = \tilde{x}\ sin\ \phi - \tilde{z}\ cos\ \phi$
$y = \tilde{y}$
$z = \tilde{x}\ cos\ \phi + \tilde{z}\ sin\ \phi$

Damit erhalten wir:

$$(5.1)\quad sin\ \gamma\ =\ z\ =\ \tilde{x}\ cos\ \phi\ +\ \tilde{z}\ sin\ \phi\ =\ -cos\ \delta\ cos\ \tau\ cos\ \phi\ +\ sin\ \delta\ sin \phi$$

$$(5.2)\quad \tau\ =\ arccos\,\frac{sin\ \delta\ sin\ \phi\ -\ sin\ \gamma}{cos\ \delta\ cos\ \phi}\ \approx\ arccos\,\frac{sin\ \delta\ sin\ \phi\ +\ \sqrt{2h/R}}{cos\ \delta\ cos\ \phi}\quad \text{(Näherung nach (3.2), (3.3))}$$

Man beachte, dass in (5.2) γ ein anderes Vorzeichen als in Abschnitt 3. hat, da die Sonne unter dem Horizont steht.

$$(5.3)\quad \delta = 0\quad \longrightarrow\quad \tau\ \approx\ arccos\,\frac{\sqrt{2h/R}}{cos\ \phi}$$

$$(5.4)\quad R\ \approx\ \frac{2h}{(cos\ \tau\ cos\ \delta\ cos\ \phi\ -\ sin\ \delta\ sin\ \phi)^2}$$

$$(5.5)\quad \delta = 0 \quad \longrightarrow \quad R \;\approx\; \frac{2h}{(cos\ \tau\ cos\ \phi)^2}$$

In (5.2) - (5.5) ist τ keine Zeitdauer, sondern ein Zeitpunkt, der im Intervall $[0, 2\pi)$ gemessen wird. Für t wie in Abschnitt 4. (in Tagen gemessen) muss also die rechte Seite von (5.2) noch vom τ-Wert für $h = 0$ subtrahiert werden und alles durch $[0, 2\pi)$ dividiert werden:

$$(5.6)\quad t \;\approx\; \frac{1}{2\pi}\,(arccos(tan\,\delta\, tan\,\phi) - arccos\,\frac{sin\ \delta\ sin\ \phi\ +\ \sqrt{2h/R}}{cos\ \delta\ cos\ \phi}\,)$$

$$\Longrightarrow \quad \sqrt{2h/R} \;\approx\; cos(arccos(tan\,\delta\, tan\,\phi) - 2\pi t)\; cos\,\delta\; cos\,\phi - sin\,\delta\; sin\,\phi$$

$$(5.7)\quad \delta = 0 \quad \longrightarrow \quad t \;\approx\; \frac{1}{2\pi}\, arcsin\, \frac{\sqrt{2h/R}}{cos\ \phi}$$

$$(5.8)\quad R \;\approx\; \frac{2h}{(cos(arccos(tan\ \delta\ tan\ \phi)\ -\ 2\pi t)\ cos\ \delta\ cos\ \phi\ -\ sin\ \delta\ sin\ \phi)^2}$$

$$(5.9)\quad \delta = 0 \quad \longrightarrow \quad R \;\approx\; \frac{2h}{(sin\ 2\pi t\ cos\ \phi)^2}$$

(4.2) ist eine Näherung für (5.7) wegen $arcsin\ x \;\approx\; x$ für kleine x.
(4.3) ist eine Näherung für (5.9) wegen $sin\ x \;\approx\; x$ für kleine x.

Anwendung

Alle Berechnungen sollten nur für kleine Höhen h durchgeführt werden, damit die approximativen Formeln eine ausreichende Genauigkeit aufweisen.

Tag- und Nachtgleiche :

Mit Stoppuhr : (4.4) ist wohl die am besten geeignete Formel zur Berechnung von R. Falls die zweite Zeitmessung am Boden erfolgt ($h_2 = 0$), wird man (4.3) oder (5.9) nehmen.

Mit Uhr : Verfügt man über eine Uhr mit Lokalzeit, benötigt man **nur eine einzige Messung** ! (5.5) liefert das gewünschte Resultat.

Außerhalb der Tag- und Nachtgleiche :

Mit Stoppuhr : Hier kommt (5.8) zur Anwendung. Es wird vorausgesetzt, dass die zweite Messung am Boden erfolgt. - Für zwei Höhen $h_1 > h_2 > 0$ wie in (4.4) erhält man mit (5.6)

$$(5.10)\quad t_1{-}t_2 \;\approx\; \frac{1}{2\pi}\,(arccos\,\frac{sin\;\delta\;sin\;\phi\;+\;\sqrt{2h_2/R}}{cos\;\delta\;cos\;\phi} - arccos\,\frac{sin\;\delta\;sin\;\phi\;+\;\sqrt{2h_1/R}}{cos\;\delta\;cos\;\phi}\,)$$

und berechnet damit R numerisch.

Mit Uhr : Verfügt man über eine Uhr mit Lokalzeit, benötigt man **nur eine einzige Messung** ! (5.4) liefert das gewünschte Resultat.

Beispiel 1

$\phi = 54,19°$ (Helgoland, Ostküste) $\quad \delta = -5°$ (8. März)

Wir messen die Dauer zwischen den Zeitpunkten, in denen die Sonne die Spitze bzw. den Fuß eines Pfahls am Ufer berührt :

$h = 6,1\;m \qquad t = 33\;sec \qquad \longrightarrow \qquad R \;\approx\; 6326,44\;km$ (mit (5.8))

Beispiel 2

$\phi = 47,67°$ (Tor Bay, Neufundland) $\quad \delta = -20°$ (22. November)

Wir schauen auf die Uhr (Lokalzeit), wenn die Sonne die Spitze eines Fahnenmasts am Ufer berührt :

$h = 14\;m \qquad \tau = 113,35° \;=\; 7:33:24$ Uhr $\quad \longrightarrow \quad R \;\approx\; 6699,51\;km$ (mit (5.4))

Beispiel 3

$\phi = 37,06°$ (Syrakus, Ostufer) $\quad \delta = 0°$ (20. März)

Wir messen die Dauer zwischen den Zeitpunkten, in denen die Sonne beim Aufgang ein Haus am Ufer in zwei verschiedenen Höhen berührt :

$h_1 = 11\;m \quad h_2 = 5\;m \qquad t_1 - t_2 = 10,5\;sec \qquad \longrightarrow \qquad R \;\approx\; 6289,31\;km$ (mit (4.4))

Beispiel 4

$\phi = 32,77°$ (Porto da Cruz, Madeira, Nordostufer) $\quad \delta = 21,3°$ (17. Juli)

Wir messen die Dauer zwischen den Zeitpunkten, in denen die Sonne beim Aufgang einen Pfahl am Ufer in zwei verschiedenen Höhen berührt :

$h_1 = 10\;m \quad h_2 = 2,5\;m \qquad t_1{-}t_2 = 16\;sec \qquad \longrightarrow \qquad R \;\approx\; 6427,85\;km$ (numerisch mit (5.10))

Wie genau muss man messen?

Ein Problem bei praktischen Messungen ist die präzise Ablesung von Uhr bzw. Stoppuhr, da die Schattenlinie auf einem Pfahl oder einem Haus nicht sehr scharf sein wird. Das soll anhand von Beispiel 1 gezeigt werden. Eine Abweichung von 1 *sec*, also ca. 3% bei der Zeitmessung führt auf eine Abweichung von ca. 6% beim Erdradius.

Quellen

[1] `https://www.solipsys.co.uk/new/ColinsBlog.html`

[2] `https://www.solipsys.co.uk/new/EarthRadiusRefined.html?ColinsBlog`

[3] `https://www.flyingcoloursmaths.co.uk/blog/`

[4] `http://www.flyingcoloursmaths.co.uk/stab-colins-puzzle`

[5] `https://de.wikipedia.org/wiki/GeozentrischesKoordinatensystem`

[6] `https://en.wikipedia.org/wiki/Equatorialcoordinatesystem`

[7] `https://en.wikipedia.org/wiki/Horizontalcoordinatesystem`

Kommentare zu diesem Beitrag

Stand 2020-05-23